

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой

Математических методов исследования операций



Азарнова Т.В.

22.03.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.О.34 Линейная алгебра**

- 1. Код и наименование направления подготовки / специальности:**  
38.03.05 Бизнес-информатика
- 2. Профиль подготовки / специализация/магистерская программа:**  
Бизнес-аналитика и системы автоматизации предприятий
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** математических методов исследования операций
- 6. Составители программы:** Бондаренко Ю.В., д. т. н., профессор кафедры ММИО
- 7. Рекомендована:** научно-методическим советом факультета ПММ 22.03.2024, протокол №5
- 8. Учебный год:** 2024/2025 **Семестр(ы):** 1

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- обучение теоретическим основам, основным закономерностям линейной алгебры;
- приобретение навыков решения практических задач по линейной алгебре;
- расширение знаний и компетенций студентов по направлениям приложения математического аппарата и инструментальных средств линейной алгебры в современных научных и практических исследованиях в области экономики, бизнес-анализа, управления и поддержки принятия решений.

*Задачи учебной дисциплины:*

- изучение основных понятий теории множеств и свойств основных алгебраических структур;
- изучение теоретических основ и положений матричной алгебры;
- обучение методам и алгоритмам проведения матричного анализа, исследования и решения систем линейных уравнений;
- усвоение обучающимися элементов современной теории линейных пространств и линейных операторов как теоретической основы обоснования алгоритмов обработки данных;
- приобретение навыков решения и исследования аналитических и практических задач экономической и управленческой практики методами линейной алгебры.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** (цикл, к которому относится дисциплина, требования к входным знаниям, умениям и навыкам, дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к обязательной части блока Б1 дисциплин учебного плана.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения**

| Код   | Название компетенции  | Код(ы)  | Индикаторы(ы)   | Планируемые результаты обучения   |
|-------|---|---------|---|---|
| ОПК-4 | Способен использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и | ОПК-4.4 | Решает типовые аналитические задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых математических и естественно-научных дисциплин | Знает:<br>- основные разделы линейной алгебры;<br>- алгоритмы работы с матричными структурами и системами линейных уравнений;<br>Умеет: |

|      |  |        |   |   |
|------|--|--------|---|---|
|      | анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений  |        |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- решать типовые аналитические задачи, формально связанные с действиями над матрицами и их основными свойствами;</li> <li>- решать и исследовать системы линейных уравнений;</li> <li>- определять тип алгебраических систем, к которым относятся конкретные математические объекты и оперировать линейными отображениями.</li> </ul> <p>Владеет навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализа постановки задачи принятия решения управленческих решений и обоснования необходимости применения математического аппарата линейной алгебры для ее решения</li> <li>- выбора методов и алгоритмов решений, позволяющих найти наиболее эффективное решение конкретной аналитической задачи.</li> <li>- поиска и анализа рационального решения аналитических задач в области поддержки принятия управленческих решений..</li> </ul> |
| ПК-1 | Способен использовать методы математического и статистического анализа, экономико-математические методы для решения задач в области бизнес-аналитики | ПК-1.3 | Использует математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации данных для целей бизнес-анализа | <p>Знает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные операции над матрицами и их свойства;</li> <li>- определители квадратных матриц, операцию обращения матрицы и их свойства;</li> <li>- теоретическое обоснование методов и алгоритмы решения систем линейных уравнений.</li> </ul> <p>Умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- осуществлять поиск задач бизнес анализа, формальное представление которых описывается системой линейных уравнений;</li> <li>- производить действия над матрицами, требуемые для конкретной задачи бизнес-анализа.</li> </ul> <p>Владеет навыками использования математического аппарата линейной алгебры для решения круга задач бизнес-анализа, требующих решения систем линейных уравнений и обработки матричных структур.</p>   |

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом —5/180.**

**Форма промежуточной аттестации экзамен.**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы                                    | Трудоемкость |              |            |     |
|---|--------------|--------------|------------|-----|
|   | Всего        | По семестрам |            |     |
|   |              | 1            | № семестра | ... |
| Аудиторные занятия                                    | 84           | 84           |            |     |
| в том числе:  | лекции       | 34           | 34         |     |
|   | практические | 50           | 50         |     |
|   | лабораторные | -            | -          |     |
| Самостоятельная работа                                | 60           | 60           |            |     |
| в том числе: курсовая работа (проект)                 | -            | -            |            |     |
| Форма промежуточной аттестации<br>(экзамен – __ час.) | 36           | 36           |            |     |
| Итого:  | 180          | 180          |            |     |

#### 13.1. Содержание дисциплины

| № п/п            | Наименование раздела дисциплины         | Содержание раздела дисциплины   | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК  |
|------------------|---|---|---|
| <b>1. Лекции</b> |   |   |   |
| 1.1              | Теория множеств. Алгебраические системы | <p>Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера –Венна. Свойства операций над множествами. Понятие декартова (прямого) произведения множеств. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Отображения. Способы задания отображений. Понятие сюръективного, инъективного и биективного отображения. Обратное отображение</p> <p>Суперпозиция отображений. Степень отображения. Теорема об обратном к суперпозиции. Теорема об ассоциативности суперпозиции отображений. Алгебраические операции и алгебраические системы. Группа, кольцо, поле.</p> <p>Понятие комплексного числа. Поле комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение, деление, возведение в степень чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексного числа. Приложение теории отношений к реляционным моделям данных.</p> | <p>Линейная алгебра (бизнес-информатика)</p> <p><u>Курс:</u><br/><a href="#">Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a></p> |
| 1.2              | Матричная алгебра                       | <p>Основные сведения о матрицах. Виды матриц. Операции над матрицами. Свойства операций над матрицами.</p> <p>Определители квадратных матриц. Теорема о величине определителя квадратной матрицы. Свойства определителя.</p> <p>Обратная матрица. Теорема о необходимых и достаточных условиях существования обратной матрицы. Свойства обратных матриц.</p> <p>Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.</p> <p>Линейные комбинации строк и столбцов матрицы. Теорема о линейной комбинации строк.</p>   | <p>Линейная алгебра (бизнес-информатика)</p> <p><u>Курс:</u><br/><a href="#">Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a></p> |

|                                |   |   |   |
|--------------------------------|---|---|---|
|                                |   | Теорема о связи ранга матрицы с числом линейно независимых строк.<br>Приложение матричного анализа в экономике: модель Леонтьева, задача выпуска продукции.   |   |
| 1.3                            | Системы линейных уравнений              | Понятие системы линейных уравнений и ее решения.<br>Метод обратной матрицы.<br>Метод Крамера решения системы.<br>Метод Гаусса решения систем.<br>Теорема Кронекера-Капелли совместности системы уравнений.<br>Однородные системы линейных уравнений. Свойства.<br>Фундаментальная система решений однородной системы.<br>Теорема о фундаментальных решениях однородной системы.<br>Теорема об общем решении системы неоднородных линейных уравнений.<br>Приложение методов решения систем линейных уравнений в задачах планирования на производстве и принятии решений. | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 1.4                            | Линейные пространства                   | Понятие линейного пространства. Примеры. Следствия аксиом линейного пространства.<br>Подпространство линейного пространства. Примеры.<br>Линейная зависимость векторов. Теорема о линейной зависимости.<br>Базис и размерность пространства.  | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 1.5                            | Линейные операторы                      | Понятие линейного оператора. Примеры..<br>Ядро и образ линейного оператора.<br>Понятие собственного вектора и собственного значения линейного оператора.<br>Приложения теории линейных операторов в алгоритмах обработки статистической информации.   | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| <b>2. Практические занятия</b> |   |   |   |
| 2.1                            | Теория множеств. Алгебраические системы | Множества. Операции над множествами.<br>Декартово произведение множеств. Отношения.<br>Отображения. Свойства отображений.<br>Комплексные числа: операции и извлечение корней.   | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 2.2                            | Матричная алгебра                       | Матрицы и операции над матрицами.<br>Определители квадратных матриц.<br>Обратная матрица.   | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |

|     |                            |  |   |
|-----|----------------------------|--|---|
| 2.3 | Системы линейных уравнений | Метод Крамера и метод обратной матрицы.<br>Метод Гаусса решения систем линейных уравнений специального вида.<br>Решение однородных систем линейных уравнений.<br>Модель Леонтьева. | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 2.4 | Линейные пространства      | Проверка принадлежности множеств к линейным пространствам.<br>Размерность линейного пространства. Базис.   | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 2.5 | Линейные операторы         | Линейный оператор. Матрица оператора.<br>Нахождение ядра и образа линейного оператора.<br>Собственный вектор и собственное значение линейного оператора.                           | Линейная алгебра (бизнес-информатика)<br><a href="#">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела дисциплины         | Виды занятий (часов) |              |              |                        | Всего |
|-------|---|----------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |   | Лекции               | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа |       |
| 1     | Теория множеств. Алгебраические системы | 8                    | 10           |              | 12                     | 30    |
| 2     | Матричная алгебра                       | 8                    | 10           |              | 12                     | 30    |
| 3     | Системы линейных уравнений              | 6                    | 10           |              | 12                     | 28    |
| 4     | Линейные пространства                   | 6                    | 10           |              | 12                     | 28    |
| 5     | Линейные операторы                      | 6                    | 10           |              | 12                     | 28    |
|       | Итого:                                  | 34                   | 50           |              | 60                     | 144   |

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

Освоение дисциплины «Линейная алгебра» включает лекционные занятия, практические занятия и самостоятельную работу обучающихся.

На первом занятии студент получает информацию для доступа к комплексу учебно-методических материалов.

Лекционные занятия посвящены рассмотрению теоретических основ линейной алгебры, ключевых принципов, базовых понятий и алгоритмов.

Практические занятия предназначены для формирования умений и навыков, закрепленных компетенций по ОПОП. Они закрепляют теоретический материал, полученный на лекциях.

Самостоятельная работа студентов включает в себя проработку учебного материала лекций, разбор практических заданий, подготовку к экзамену.

Промежуточная аттестация. Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена. Типовой билет включает теоретический и практический блоки. Вопросы теоретического блока полностью соответствуют лекционному материалу. В течение семестра обучающимся предлагается выполнить предусмотренные учебным планом 2 контрольные работы.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения следует выполнять все указания преподавателя по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины** (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 1     | Лившиц, К. И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для вузов / К. И. Лившиц. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 508 с. — ISBN 978-5-8114-7640-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/163398">https://e.lanbook.com/book/163398</a> (дата обращения: 23.12.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей. |
| 2     | Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 300 с. — ISBN 978-5-8114-2717-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/167492">https://e.lanbook.com/book/167492</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей.  |
| 3     | Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 18-е изд., перераб. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4916-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/152643">https://e.lanbook.com/book/152643</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей.                   |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 4     | Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 736 с. — ISBN 978-5-8114-0317-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/167784">https://e.lanbook.com/book/167784</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей.  |
| 5     | Кряквин, В. Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях : учебное пособие / В. Д. Кряквин. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-2090-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/168907">https://e.lanbook.com/book/168907</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.  |
| 6     | Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 496 с. — ISBN 978-5-8114-9224-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/190976">https://e.lanbook.com/book/190976</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей. |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 7     | Университетская библиотека on-line Режим доступа: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a>  |
| 8     | ЭБС Лань. Режим доступа: <a href="http://www.e.lanbook.com">http://www.e.lanbook.com</a>   |
| 9     | Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a> );  |
| 10    | Электронная библиотека технического ВУЗа «Консультант студента» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://www.studmedlib.ru/">https://www.studmedlib.ru/</a> );   |
| 11    | Линейная алгебра (бизнес-информатика) / Ю.В. Бондаренко. – Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». – Режим доступа - <a href="https://www.vsu.ru">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a> |
| 12    | Линейная алгебра/ ВШЭ. – НПОО.- Режим доступа: <a href="https://openedu.ru/course/hse/LINAL/">https://openedu.ru/course/hse/LINAL/</a>   |
| 13    | Линейная алгебра и аналитическая геометрия / СПбПУ. – Coursera. – Режим доступа: <a href="https://www.coursera.org/learn/lineynaya-algebra">https://www.coursera.org/learn/lineynaya-algebra</a>                         |

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям и подготовку к промежуточной аттестации.

Для обеспечения самостоятельной работы студентов в электронном курсе дисциплины на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» сформирован учебно-методический комплекс, который включает в себя: программу курса, учебные пособия и справочные материалы, методические указания по выполнению проекта. Студенты получают доступ к данным материалам на первом занятии по дисциплине.

Указанные в учебно-методическом комплексе учебные пособия и справочные материалы, приведены в таблице ниже:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 1     | Бондаренко Ю.В. Линейная алгебра: матрицы, системы линейных уравнений: учебное пособие/ Ю.В. Бондаренко, К.В. Чудинова. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2018. – 49 с.   |
| 2     | Линейная алгебра (бизнес-информатика) / Ю.В. Бондаренко. – Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». – Режим доступа - <a href="https://www.vsu.ru">Курс: Линейная алгебра (бизнес-информатика) (vsu.ru)</a>   |
| 3     | Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: <a href="http://www.ru/lib.vsu/ru">http://www.ru/lib.vsu/ru</a>  |
| 4     | Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-6776-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/152434">https://e.lanbook.com/book/152434</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей. |

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, для организации самостоятельной работы обучающихся используется онлайн-курс, размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**



Аудитория должна быть оборудована: компьютер преподавателя, мультимедиа оборудование (проектор, средства звуковоспроизведения), доска меловая, специализированная мебель.

Для самостоятельной работы необходимы компьютерные классы, помещения, оснащенные компьютерами с доступом к сети Интернет.

Для самостоятельной работы необходимы компьютерные классы, помещения, оснащенные компьютерами с доступом к сети Интернет.

Информационные технологии для реализации учебной дисциплины:

- технологии синхронного и асинхронного взаимодействия студентов и преподавателя посредством служб (сервисов) по пересылке и получению электронных сообщений, в том числе, по сети Интернет;
- сервис электронной почты для оперативной связи преподавателя и студентов.

Программное обеспечение:

Windows 10 (лицензионное ПО);

LibreOffice (свободное и/или бесплатное ПО);

Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО);

Notepad ++ (свободное и/или бесплатное ПО); 7-zip (свободное и/или бесплатное ПО); Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное ПО)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименования раздела дисциплины            | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства                         |
|-------|--|----------------|-------------------------------------|--|
| 1     | Теория множеств.<br>Алгебраические системы | ОПК-4, ПК-1    | ОПК-4.4, ПК-1.3                     | Контрольная работа 1,<br>домашние задания  |
| 2     | Матричная алгебра                          | ОПК-4, ПК-1    | ОПК-4.4, ПК-1.3                     | Контрольная работа 2,<br>домашние задания  |
| 3     | Системы линейных уравнений                 | ОПК-4, ПК-1    | ОПК-4.4, ПК-1.3                     | Контрольная работа 2,<br>домашние задания  |
| 4     | Линейные пространства                      | ОПК-4          | ОПК-4.4                             | Контрольная работа 2,<br>домашние задания  |
| 5     | Линейные операторы                         | ОПК-4          | ОПК-4.4                             | Контрольная работа 2,<br>домашние задания  |
| 6     | Экзамен                                    |                |                                     | Перечень вопросов,<br>Практическое задание |

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- контрольная работа 1,
- контрольная работа 2,
- домашние задания

## Контрольные работы

### Контрольная работа 1 (типовой вариант)

**№ 1.** Доказать тождество:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**№ 2.** Исследовать на сюръективность и инъективность функцию  $f: R \rightarrow R$ , где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

**№ 3.** Найти  $\frac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{50}}$ .

**№ 4.** Фирма предполагает инвестировать средства в один из пяти бизнес-проектов. Для оценки и выбора проекта привлекается эксперт. Результаты парных сравнений экспертом проектов по предпочтению приведены в матрице парных сравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определите, какими свойствами обладает отношение предпочтения эксперта? Можно ли на основе данной информации выбрать лучший проект? Ответ обоснуйте.

**№ 5.**

Даны 2 таблицы данных: «Клиент» и «Дата поставки».

**Таблица «Клиент»**

| Наименование организации | Юридический адрес          |
|--------------------------|----------------------------|
| ООО «Вымпел»             | г. Москва, ул. Цветная, 21 |
| ООО «Заря»               | г. Москва, ул. Зеленая, 12 |
| ООО «Ангелы ИТ»          | г. Воронеж, ул. Кирова, 1  |

**Таблица «Дата поставки»**

| Наименование организации | Дата поставки товара |
|--------------------------|----------------------|
| ООО «Вымпел»             | 20.01.2020           |
| ООО «Заря»               | 14.02.2018           |
| ООО «Заря»               | 30.05.2019           |
| ООО «Заря»               | 1.09.2020            |
| ООО «Ангелы ИТ»          | 21.04.2019           |
| ООО «Ангелы ИТ»          | 21.05.2010           |

Опишите каждую таблицу в терминах отношений. Найдите произведение Клиент×Дата поставки.

### Технология проведения

Контрольная работа рассчитана на 2 академических часа.

### Критерии оценивания

Для оценивания результатов работы используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

| Критерии оценивания  | Шкала оценок               |
|--|----------------------------|
| Обучающийся верно решил не менее 4 заданий. При этом одно задание может быть решено неверно из-за вычислительной ошибки. | <i>Отлично</i>             |
| Верно решено 4 задания и допущенная ошибка не является арифметической.   | <i>Хорошо</i>              |
| Верно решено 3 задания.  | <i>Удовлетворительно</i>   |
| Верно решено менее 3 заданий   | <i>Неудовлетворительно</i> |

### Контрольная работа 2 (типовой вариант)

№ 1. Найти матрицу  $C^{-1}$ , обратную к матрице  $C = AB^t + 2E$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 2. Найти ранги матриц. Выяснить, какие матрицы имеют обратные:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

№ 3. Выяснить вопрос о положительной определенности квадратичной формы с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Выписать квадратичную форму.

№ 4. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$$

№ 5. На предприятии для выпуска 4 видов продукции (A, B, C, D) используют 3 вида ресурсов: сырье, оборудование и рабочую силу. Расход каждого вида

ресурса на выпуск единицы продукта и имеющийся объем ресурсов предприятия приведены в таблице.

|              | A | B | C | D | Запас ресурса |
|--------------|---|---|---|---|---------------|
| Сырье        | 4 | 2 | 1 | 5 | 125           |
| Оборудование | 1 | 5 | 8 | 1 | 130           |
| Рабочая сила | 5 | 6 | 1 | 7 | 280           |

Определите, сколько необходимо произвести каждого вида продукции, чтобы полностью израсходовать имеющиеся ресурсы.

Составьте математическую модель задачи. Решите методом Гаусса.

### Технология проведения

Контрольная работа рассчитана на 2 академических часа. Допускается использование непрограммируемого калькулятора.

### Критерии оценивания

Для оценивания результатов работы используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

| Критерии оценивания  | Шкала оценок               |
|--|----------------------------|
| Обучающийся верно решил не менее 4 заданий. При этом одно задание может быть решено неверно из-за вычислительной ошибки. | <i>Отлично</i>             |
| Верно решено 4 задания и допущенная ошибка не является арифметической.   | <i>Хорошо</i>              |
| Верно решено 3 задания.  | <i>Удовлетворительно</i>   |
| Верно решено менее 3 заданий   | <i>Неудовлетворительно</i> |

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: вопросы к экзамену, перечень практических задач.

КИМ включает теоретические вопросы из списка вопросов к экзамену и практические задания.

### Перечень вопросов к экзамену

1. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера –Венна.
2. Свойства операций над множествами.
3. Понятие декартова (прямого) произведения множеств. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности.
4. Отображения. Способы задания отображений. Понятие сюръективного, инъективного и биективного отображения. Обратное отображение
5. Суперпозиция отображений. Степень отображения. Теорема об обратном к суперпозиции. Теорема об ассоциативности суперпозиции отображений.
6. Алгебраические операции и алгебраические системы. Группа, кольцо, поле.

7. Понятие комплексного числа. Поле комплексных чисел.
8. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение, деление, возведение в степень чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
9. Извлечение корней из комплексного числа.
10. Основные сведения о матрицах. Виды матриц.
11. Операции над матрицами. Свойства операций над матрицами.
12. Определители квадратных матриц. Теорема о величине определителя квадратной матрицы.
13. Свойства определителя.
14. Обратная матрица. Теорема о необходимых и достаточных условиях существования обратной матрицы.
15. Свойства обратных матриц.
16. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
17. Линейные комбинации строк и столбцов матрицы. Теорема о линейной комбинации строк.
18. Теорема о связи ранга матрицы с числом линейно независимых строк.
19. Понятие системы линейных уравнений и ее решения.
20. Метод обратной матрицы.
21. Метод Крамера решения системы.
22. Метод Гаусса решения систем.
23. Теорема Кронекера-Капелли совместности системы уравнений.
24. Однородные системы линейных уравнений. Свойства.
25. Фундаментальная система решений однородной системы. Теорема о фундаментальных решениях однородной системы.
26. Теорема об общем решении системы неоднородных линейных уравнений.
27. Понятие линейного пространства. Примеры. Следствия аксиом линейного пространства.
28. Подпространство линейного пространства. Примеры.
29. Линейная зависимость векторов. Теорема о линейной зависимости.
30. Базис и размерность пространства.
31. Понятие линейного оператора. Примеры..
32. Ядро и образ линейного оператора.
33. Понятие собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

### Практические задания ( типовые )

1. На множестве действительных чисел  $\mathbf{R}$  задано бинарное отношение  $\rho \subseteq R \times R$  такое, что  $(x, y) \in \rho$  тогда и только тогда, когда  $x - y$  - целое. Докажите, что  $\rho$  - отношение эквивалентности.
2. Исследовать на сюръективность и инъективность функцию  $f: R \rightarrow R$ , где  $f(x) = |x|$ .
3. Заданы отображения  $f: X \rightarrow X$ ,  $g: X \rightarrow X$ , где  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти  $f \circ g^{-1}$ .
4. Найти  $\sqrt[3]{2-2i}$ .

5. Найти матрицу  $C^{-1}$ , обратную к матрице  $C = AB^t + 2E$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Найти ранги матриц. Выяснить, какие матрицы имеют обратные:

1)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ; 2)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; 3)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; 4)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

7. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

8. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

9. Найти размерность и базис линейного подпространства  $M = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ . Определить тип поверхности (линии), которую определяет данное подпространство. Изобразить эту поверхность (линию).

10. Линейный оператор  $A: R^3 \rightarrow R^3$  переводит вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в вектор  $Ax = (5x_1 + x_2 + x_3, -4x_1 + 2x_2 - x_3, 4x_1 - x_2 + x_3)$ . Построить матрицу оператора в стандартном базисе.

11. Выяснить вопрос о положительной определенности квадратичной формы с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 20 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Выписать квадратичную форму.

12. На предприятии для выпуска 4 видов продукции (А, В, С, D) используют 3 вида ресурсов: сырье, оборудование и рабочую силу. Расход каждого вида ресурса на выпуск единицы продукта и имеющийся объем ресурсов на предприятии приведены в таблице.

|              | А | В | С | Д | Запас ресурса |
|--------------|---|---|---|---|---------------|
| Сырье        | 6 | 2 | 2 | 5 | 150           |
| Оборудование | 0 | 4 | 8 | 1 | 130           |
| Рабочая сила | 5 | 6 | 1 | 7 | 400           |

Определите, сколько необходимо произвести каждого вида продукции, чтобы полностью израсходовать имеющиеся ресурсы.

Составьте математическую модель задачи. Решите методом Гаусса.

13. Предприятие производит  $n$  типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей  $A_{1,n}$ . Цена реализации единицы  $i$ -того типа продукции в  $j$ -ом регионе задана матрицей  $B_{n,k}$ , где  $k$  – число регионов,

### Контрольно-измерительный материал (типовой вариант)

#### Контрольно-измерительный материал №\_1\_

1. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Привести пример таких множеств  $A$ ,  $B$  и  $K$ , что  $A \subseteq B$ ,  $B \in K$ ,  $A \notin K$ .
2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение, деление, возведение в степень чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.  
Перевести в тригонометрическую форму число  $z = 1 - i$ . Найти  $z^5$ .
3. Приведите определение обратной матрицы. Каким условиям должна удовлетворять матрица для того, чтобы существовала обратная к ней?

Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Существует ли  $A^{-1}$ ? В случае положительного

ответа найдите  $A^{-1}$ .

4. Имеются данные (см. таблицу) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции  $Y_1$  в будущем периоде.

| Производящие отрасли | Потребляющие отрасли |     | Чистая продукция | План, $Y_1$ |
|----------------------|----------------------|-----|------------------|-------------|
|                      | 1                    | 2   |                  |             |
| 1                    | 80                   | 120 | 300              | 350         |
| 2                    | 70                   | 30  | 200              | 300         |

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск продукции в плановом периоде, обеспечивающий выпуск конечной продукции  $Y_1$ .

### Технология проведения

Экзамен проводится в письменной форме. Студенты отвечают на вопросы в течение 2 академических часов. После проверки письменных работ (обычно через 2 часа), в заранее оговоренное время дня экзамена студенты приглашаются на оглашение результатов, показ работ и уточнения. С теми студентами, чьи работы требуют дополнительного обсуждения, проводится дополнительная беседа по материалам билета и программе курса.

Для оценивания результатов ответов на задания КИМ обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

|                     |              |
|---------------------|--------------|
| Критерии оценивания | Шкала оценок |
|---------------------|--------------|

|   |                            |
|---|----------------------------|
| даны правильные ответы на теоретические вопросы и правильно решены практические задания                                 | <i>Отлично</i>             |
| при общем верном ходе доказательства имеются ошибки при доказательствах теорем и (или) арифметические ошибки в задачах; | <i>Хорошо</i>              |
| не приведены доказательства теорем при знании основных определений и умении решать практические задачи .                | <i>Удовлетворительно</i>   |
| Студент не знает основных определений и не владеет навыками решения практических задач.                                 | <i>Неудовлетворительно</i> |

Итоговая оценка по промежуточной аттестации  $Q_{итог}$  учитывает результаты ответов на КИМ, а также результаты контрольных работ и рассчитывается по следующей формуле:

$$Q_{итог} = \text{округл}(0,5 \cdot Q_3 + 0,2 \cdot Q_1 + 0,3 \cdot Q_2),$$

где  $Q_3$  – оценка за КИМ,  $Q_1, Q_2$  – оценки по контрольным работам.

Если оценка, полученная за КИМ отличается не менее чем на 2 балла в большую сторону от оценки за какую-либо контрольную работу, по согласию студента и преподавателя студенту могут быть выданы дополнительные практические задания для повышения оценки. Если отличие в меньшую сторону – возможна беседа по теоретическому материалу.

### **20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

#### **Вопросы с вариантами ответов (закрытые)**

1. Пусть  $A$  – матрица размерности  $m \times n$ . Какую размерность имеет транспонированная к ней матрица  $A^t$ ? Выберите правильный вариант ответа.

- а)  $(m + n) \times n$
- б)  $m \times n$
- в)  $(m + n) \times (m + n)$
- г)  $n \times m$ .

Ответ: г)

2. Определитель каких матриц равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали? Выберите правильные варианты ответа.

- а) квадратная матрица;
- б) диагональная матрица;**
- в) верхнетреугольная матрица;**
- г) обратимая матрица.

Ответ: б), в)

3. Какой вид имеет решение системы линейных уравнений  $A \cdot X = b$ , полученное методом обратной матрицы? Выберите правильный вариант ответа.

- а)  $X = A^{-1} \cdot b$



б)  $X = b \cdot A^{-1}$

в)  $X = b \cdot A^{-1} \cdot b^{-1}$

Ответ: а)

4. Установите соответствие между матрицами  $A$  и их рангами  $r(A)$ :

1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ответы

1.  $r(A) = 1$

2.  $r(A) = 3$

3.  $r(A) = 2$

Ответ: 1-1, 2-3, 3-2

**Вопросы с кратким текстовым ответом (открытые)**

5. Найдите определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ответ: -4

6. Решить систему линейных уравнений, записанную в матричном виде  $A \cdot X = b$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица системы, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ – вектор переменных, } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ – столбец}$$

свободных членов. В ответе укажите сумму  $x_1 + x_2$ .

Ответ: 3

7. Модель межотраслевого баланса экономики региона в случае двух отраслей имеет следующий вид:

$$(E - A)x = y,$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  – матрица коэффициентов прямых затрат,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – единичная матрица,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  – вектор валовых выпусков,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  – вектор конечного продукта.

В предположении, что  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ . Найдите вектор конечного продукта  $y$ . В ответ запишите сумму  $y_1 + y_2$ .

Ответ: 190

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень сложности):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).